

دراسة الدوال العددية

Etude de fonctions numériques

بوزريعة: ربيع الأول 1444هـ

تمرين 1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x}{x^2 - 2x - 3}$$

ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.1- عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث من أجل كل

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3} \quad \text{فإن: } x \neq 3 \text{ و } x \neq -1$$

2- احسب النهايات عند حدود مجالات تعريف الدالة f .- اكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathcal{C})$.- ادرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي.- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.3- عيّن A و B نقطتي تقاطع $(\mathcal{C})$ مع محور الفواصل.- اكتب معادلتَي المماسين (Δ) و (Δ') للمنحني $(\mathcal{C})$ عندالنقطتين A و B . عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع (Δ) و (Δ') .4- أثبت أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ $(\mathcal{C})$.5- احسب $f(-2)$ ، $f(-3)$ ثم ارسم (Δ) ، (Δ') و $(\mathcal{C})$.

تمرين 3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $f(x) = x - \frac{2}{x+1}$ ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f .- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.- أثبت أنّ المستقيم ذي المعادلة: $y = x$ ، مستقيم مقاربمائل للمنحني $(\mathcal{C})$. عيّن معادلة للمستقيم المقارب الآخر.- بيّن أنّ تقاطع المستقيمان المقاربين مركز تناظر لـ $(\mathcal{C})$.2- عيّن إحداثيتي النقطتين A و B من $(\mathcal{C})$ بحيث يكونميل المماسين للمنحني $(\mathcal{C})$ عند هاتين النقطتين يساوي 3.- اكتب معادلة لكل من المماسين (Δ) و (Δ') للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطتين A و B . ارسم (Δ) و (Δ') .3- عيّن نقاط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المحورين ثم ارسم $(\mathcal{C})$.4- m وسيط حقيقي. ناقش بياناً حسب قيم الوسيط m وجودوعدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

تمرين 4

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 4} \quad \text{حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان}$$

1- بيّن أنّ: $f'(x) = \frac{-\alpha x^2 - 2\beta x - 4\alpha}{(x^2 - 4)^2}$ ، لما $x \in D_f$.2- عيّن العددين الحقيقيين α و β علماً بأن المنحني الممثلللدالة f في مستوٍ مزود بمعلم متعامد ومتجانس يشمل النقطة $(4; 1)$ وأنّه يقبل مماساً ميله $-\frac{3}{4}$ عند الفاصلة $x_0 = 0$.في باقي التمرين نعتبر: $\alpha = 3$ و $\beta = 0$.3- أثبت أنّ f دالة فردية. ليكن $(\mathcal{C})$ المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ مزود بمعلم. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $(\mathcal{C})$ ؟4- ادرس تغيرات الدالة f والمستقيمات المقاربة لـ $(\mathcal{C})$.- ادرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = 1$.- ارسم المنحني $(\mathcal{C})$ في معلم متعامد ومتجانس.5- ناقش حسابياً (جبرياً) حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة $f(x) = m$.- لتكن M و M' نقطتي تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المستقيم: $y = m$.احسب بدلالة m إحداثيتي النقطة N منتصف القطعة $[MM']$.

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{-4x + 12}{x^2 - 6x + 10}$ ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f .- اكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي (D) للمنحني $(\mathcal{C})$.- ادرس إشارة $f(x)$ واستنتج وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ (D) .- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.2- لتكن A نقطة تقاطع المنحني $(\mathcal{C})$ مع محور الفواصل.- عيّن إحداثيتي النقطة A .- أثبت أنّ النقطة A مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C})$.- اكتب معادلة المماس (Δ) لـ $(\mathcal{C})$ عند النقطة A .3- ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathcal{C})$.4- m وسيط حقيقي. استعمل المنحني $(\mathcal{C})$ لدراسة حسبقيم m وجود وعدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x :

$$mx^2 - 2(3m - 2)x + 10m - 12 = 0$$

تمرين 5

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

1 - بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ و أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$.

2 - ادرس تغيرات g ثم بين أن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

II - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 3 + \sqrt{x^2 + 3}$ ، وليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$.

2 - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = g(x)$.

- استنتج إنشاء جدول تغيرات الدالة f .

3 - بين أن $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته:

$$y = 2x - 3.$$

4 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = 0$ ثم ارسم (Δ) ، (Δ') و $(\mathcal{C})$.

5 - m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد نقاط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المستقيمات (Δ_m) التي معادلاتها: $y = 2x + m$.

6 - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x - 3 - \sqrt{x^2 + 3}$ ،

ليكن $(\mathcal{C}')$ تمثيلها البياني. بين أن معادلة $(\mathcal{C}') \cup (\mathcal{C})$ هي: $y^2 - 2(x-3)y - 6(x-1) = 0$.

تمرين 6

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1 - ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

تحقق أن $2,1 < \alpha < 2,2$.

3 - استنتج من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$ إشارة $g(x)$.

II - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2}$

ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

و $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

- ادرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$.

2 - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

- شكل جدول تغيرات الدالة f .

- بين أن $f(\alpha) = \frac{12\alpha + 9}{2\alpha^2}$ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3 - بين أن $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف. ارسم المنحني $(\mathcal{C})$.

4 - بين أنه يوجد مماس لـ $(\mathcal{C})$ يوازي المستقيم $y = x$ ارسمه.

III - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة عيّن اتجاه تغير h واحسب $h'(-2)$.

تمرين 7

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-5; 2]$ بـ:

$$f(x) = |x^2 + 3x - 4| - 2$$

ليكن المنحني $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني.

I - 1 - ادرس إشارة $x^2 + 3x - 4$ ثم عرّف الدالة f بمجالات.

2 - أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

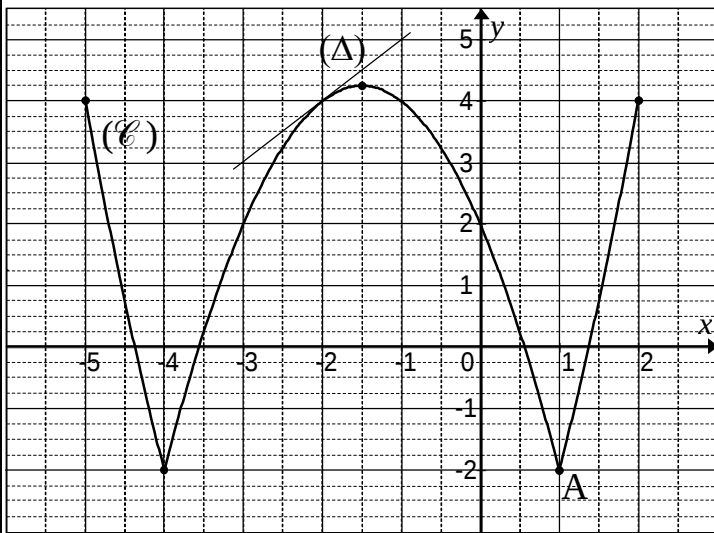
واستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$.

ب) ماذا تمثل النقطة $A(1; -2)$ ؟

ج) اكتب معادلتني نصف المماسين لـ $(\mathcal{C})$ عند $x_0 = 1$.

3 - حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلة $f(x) = 4$.

II - براءة رسم المنحني $(\mathcal{C})$ المبين في الشكل أسفله:



1 - أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-5; 2]$.

2 - عيّن عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$. يطلب إعطاء حصرا لكل حلّ بعددين صحيحين متتابعين.

3 - عيّن قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $|x^2 + 3x - 4| = m$ أربعة حلول، أحدهم فقط موجب.

4 - خمن وجود محور تناظر لـ $(\mathcal{C})$ يطلب كتابة معادلته، ثم

ثم أثبت صحة تخمينك وذلك بحساب $f(-3-x) - f(x)$.

5 - (Δ) هو المماس للمنحني $(\mathcal{C})$ عند -2 . عيّن القيمة

المقرّبة للعدد $f(-1,99)$ ، باستعمال التقريب التآلفي للدالة f .

6 - لتكن g الدالة المعرفة على $[-2; 2]$ بـ: $g(x) = f(|x|)$.

بين أن الدالة g زوجية، ثم ارسم في معلم آخر بيانها $(\mathcal{C}')$.